

ДИДОНИН ПРОБЛЕМ

DIDONA'S PROBLEM

Аутор:

КАТАРИНА ОСТОЈИЋ

8. разред ОШ „Свети Сава“ Панчево, РЦТ „Михајло Пупин“ Панчево

Ментор:

ЈЕЛЕНА САМАРЦИЋ

проф. математике ОШ „Свети Сава“ Панчево, РЦТ „Михајло Пупин“ Панчево

РЕЗИМЕ

Тема истраживачког рада везана је за геометрију, тј. тема је један класичан изопериметријски проблем- Дидонин проблем, који гласи: „Одредити максималну површину земље која се може оградити помоћу трака од воловске коже.“, а циљ рада је његово решење. Тај проблем би математички гласио: „Од свих затворених раванских кривих датог обима одредити ону која има највећу површину. Велику број математичара покушавао је решити овај проблем али су до најважнијих закључака дошли Јакоб Штајнер и, касније Карл Вајерштрас.

Кључне речи: обим, површина, затворена крива

ABSTRACT

The topic of research work is related to geometry, ie. the topic is a classic one isoperimetric problem- Didona's problem, wich reads: „Determine the maximum land area thet can be fenced off with strips of ox hide.“, and the goal of research work is its solution of this problem. That problem would read: „Of all closed plane curves of a given volume determine the one with the largest area. A loth of matematicians tried to solve this problem, but the most binding conclusions were reached by Jakob Stajner, and, later Karl Vajerstras,

Keywords: volume, area, closed curve

УВОД

Прича о овом математичком проблему потиче још од 815. године пре нове ере и тиче се оснивања Картагине, која се налази на простору данашњег Туниса.

Дидона или Елиса, феничанска принцеза, кћи феничанског краља Мута, по којој је овај математички проблем добио име, није могла више трпети свог својеглавог брата Пигмалиона, па је заједно са својим присталицама међу Феничанима побегла на обалу северне Африке. Име Дидона добила је од речи „Дидо“ која је у латинским изворима на феничанском значило луталица.

У Африци је са краљем Јарбасом, који јој у почетку није хтео продати земљу, успела успоставити договор да јој прода онолико земље колико може обухватити кожом једног бика. Дидона је била врло мудра и још је у то време добила сјајну идеју: наредила је својим поданицима да исеку кожу бика на што тање траке, којима је обележила највећу могућу копнену границу. На овом земљишту касније је је подигла тврђаву Бирсу и основала град Картагину.



Слика 1. Картагина
Picture 1. Kartaga

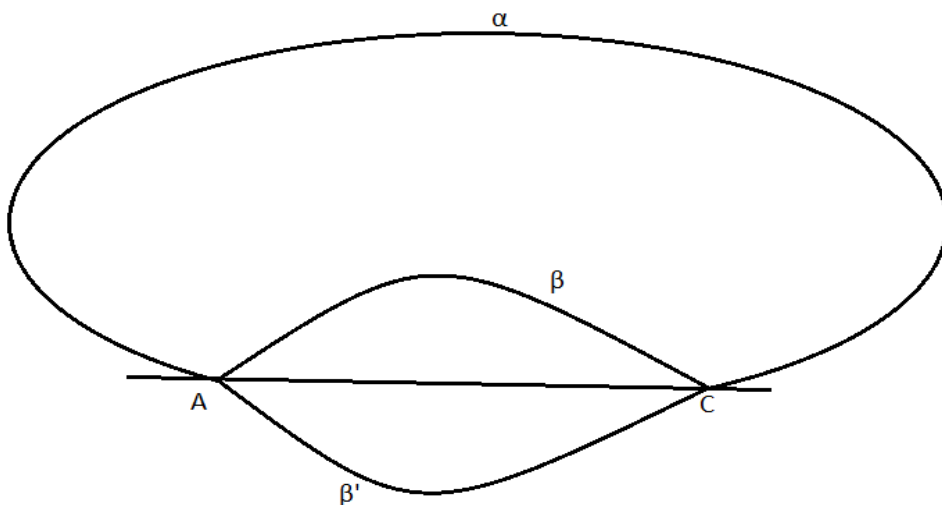
Место на карти коме се Картагина
налазила (данашњи Тунис)

РЕЗУЛТАТИ ИСТРАЖИВАЊА И ДИСКУСИЈА

Овај проблем успео је решити Јакоб Штајнер на основу 3 тврђења, иако је и он у свом решењу изоставио доказ о егзистенцији максимума.

1) Тражена крива мора у свакој тачки бити конвексна

Претпоставимо да је тражена крива у једном свом делу конкавна. Тада се на кривој налазе 2 тачке А и С и 2 лука који их спајају: α и β , таква да се ова лука налазе на истој страни праве одређене тачкама А и С. Када конструишемо лук β' , који је осно симетричан луку β у односу на праву p , то јест дуж АС, тај лук је исте дужине као лук β . У новој затвореној кривој коју смо добили лук α остао је непромењен, док смо лук β заменили луком исте дужине, тако да новонастали облик има исти обим као и првиобитни али има видно већу површину.



Слика 2.
Picture 2.

Према овоме, за сваку криву која је у неким својим деловима конкавна може се наћи конвексна крива која има исти обим а ограничава већу површину, па тражена крива мора бити **конвексна**.

2) Пречник тражене криве дели површину ограничену конвексном кривом на 2 дела.

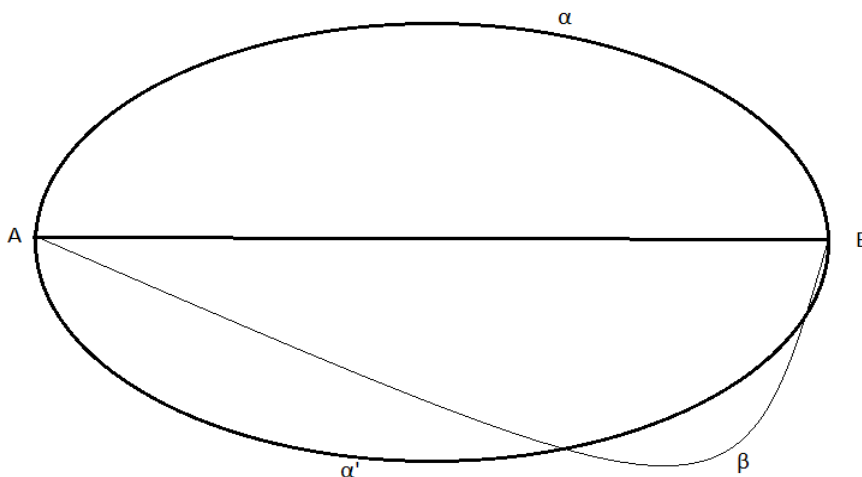
То можемо другачије рећи и овако:

Ако дуж коју формирају тачке А и В дели обим криве на једнаке делове, то значи да тетива АВ дели и површину унутар екстремалне криве на једнаке делове.

Претпоставимо супротно, тј, да пречник криве дели површину унутар ње на 2 неједнака дела P_1 и P_2 и да је $P_1 > P_2$, с тим да је дужина лукова иста, $\alpha = \beta$. Конструирајмо нови лук α' симетричан луку α .

Тј лук ограничава исту површину као и његов пар, а та површина је P_1 . Пошто је $P_1 > P_2$, а пошто новонастала затворена крива ограничава површину $P = 2P_1$.

Самим тим је површина коју ограничава новонастала крива већа од претходне.



Слика 3.
Picture 3.

3) Угао који гради било која произвољна тачка на кривој са пречником те криве-правом АВ, јесте прав.

Претпоставимо да постоји угао АСВ који није прав и докажимо да у овом случају крива не може ограничавати површину која није мања од површине коју ограничава било која друга крива исте дужине.

Површину ограничену луком α назовимо S и поделимо је на сегменте P_1 , P_2 и P_3 , с тим да је P_1 површина правоуглог троугла АВС, а P_2 и P_3 површине сегмената са стране ограничених деловима лука α и катетама поменутог троугла. Тада важи:

$$S = P_1 + P_2 + P_3$$

Заменимо троугао ABC који није правоугли једним правоуглим троуглом A'B'C', са тим да новонастала крива има исту дужину као и првобитна. Површину те криве назваћемо S1.

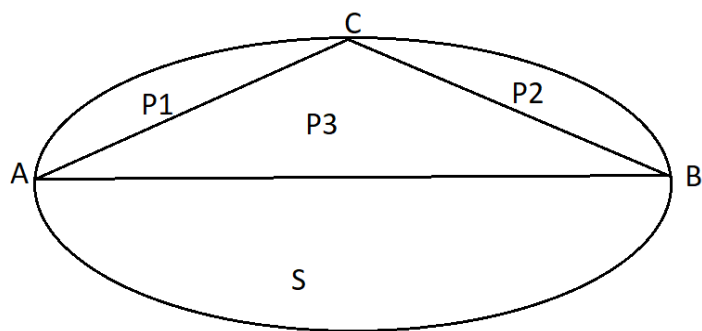
Површина новонастале криве састоји се из 3 сегмента, исто као и у првобитном случају, само што ћемо их сада назвати P1', P2' и P3', с тим да је овог пута P3 површина правоуглог троугла, узимајући у обзир да важи $P1=P1'$ и $P2=P2'$.

Сада важи:

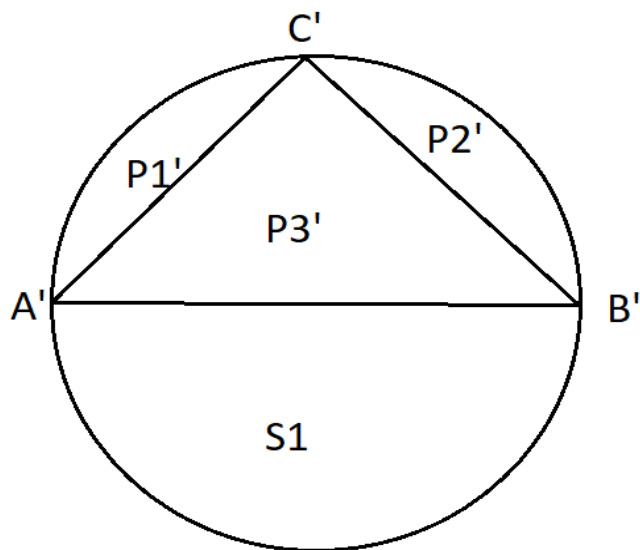
$$S1=P1'+P2'+P3'$$

Пошто су деловиса стране једнаки, њихове површине можемо занемарити и уочити да је једина разлика у површинама троуглова.

Како правоугли троугао увек има већу површину од сваког другог троугла са истима катетама $P3'>P3$, па је самим тим и $S1>S$, што доказује претходну теорију.



Слика 4.
Picture 4.



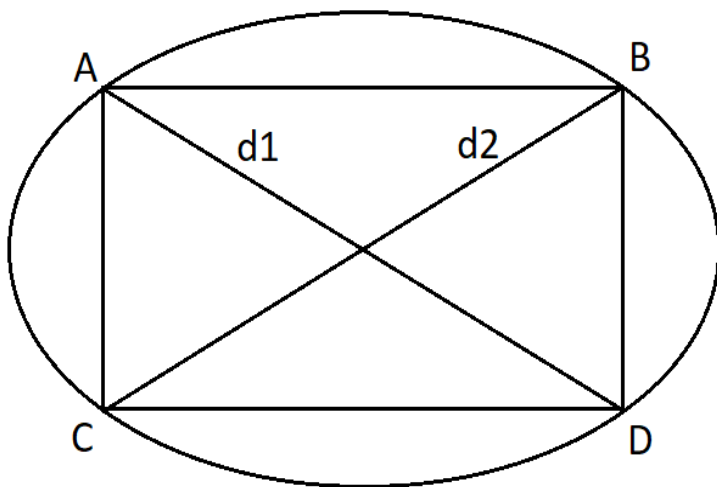
Слика 5.
Picture 5.

Ово су била тврђења Јакоба Штајнера, али постоји и једна ствар коју је он изоставио и она је већ горе наведена.

То изостављено тврђење, ја нумерисано је у наставку под бројем 4, и није ништа мање важно од прва 3.

4)Код кривих са максималном површином сви пречници су међусобно једнаки и узајамно се полове.

Нека су AD и BC два било која пречника посматране криве. С обзиром на већ наведену тврдњу под бројем 3) $\angle ABD = \angle ACD = \angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$, из тога следи да је четвороугао ABDC правоугаоник. Код правоугаоника су његове две дијагонале једнаке и секу једна другу на пола, па је то доказ наведене тврдње.



Слика 6.
Picture 6.

Сва набројана својства и карактеристике поседује једино **кружница**, што значи да је она решење Дидониног проблема.

Међутим Дидони проблем посматран је у равни, што значи да се решење односи само на мање површине. Уколико посматрамо много веће територије, у обзир морамо узети закривљеност Земље, и проблем мора бити посматран у сфери. Немачки математичар Феликс Берштајн је уочио ово, и давне 1905. извео је изопериметријску неједнакост за сферу. Рецимо да је C затворена крива на површини сфере, L дужина те криве, A њена површина, h висина калоте. Тада је:

$$A \leq \frac{L}{4\pi}$$

и

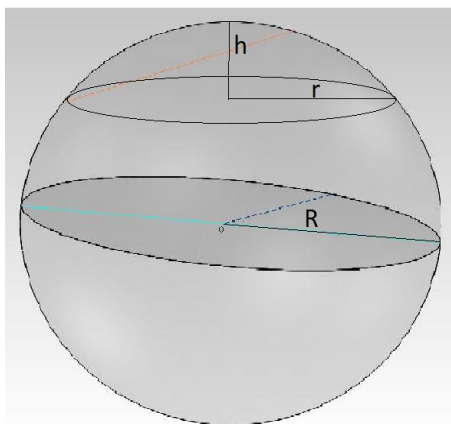
$$L^2 \geq \frac{4\pi \cdot A - A^2}{R^2}$$

У овом случају када је тражена површина део сфере она износи:

$$A = 2\pi \cdot R \cdot h = 2R\pi \left(R - \sqrt{R^2 - r^2} \right)$$

Површина A рачуна се по формули за површину сферног одсечка (калоте).

Ове једначине валидне су само уколико је C круг, што значи и да када у обзир узмемо закривљеност Земље, решење проблема је опет кружница.



Слика 7.
Picture 7.

Анкета

Одлучила сам спровести анкету с циљем да утврдим да ли људи заправо знају које је решење Дидониног проблема и без математичких хипотеза и доказа.

Постављено питање гласило је:

„Уколико имате неки канап одређене дужине и од њега требате направити геометријски облик највеће површине, који би то облик био?"



Слика 8.
Picture 8.

ЗАКЉУЧАК

На основу резултата анкете закључила сам да је велики број испитаника знао тачко одговорити на питање и да је овај проблем јако примењив у решавању геометријских питања свакодневнице.

Математички задаци у којима се појављује Дидонин проблем

Будући да је ово математички проблем, он има широку примену у решавању задатака.

Примери задатака и њихова решења:

1) Од свих правоугаоника обима 20cm одреди онај који има највећу површину.

Решење:

Нека су странице правоугаоника x и y .

$$O = 2x + 2y$$

$$x + y = 10$$

$$P = x \cdot y = x \cdot (10 - x) = 25 - (x - 5)^2$$

Правоугаоник има највећу површину 25cm^2 када је $x - 5 = 0$, то јест ако је $x = 5$.

Тада је $x = y = 5\text{cm}$.

2) Који троугао са страницама a и b има највећу површину?

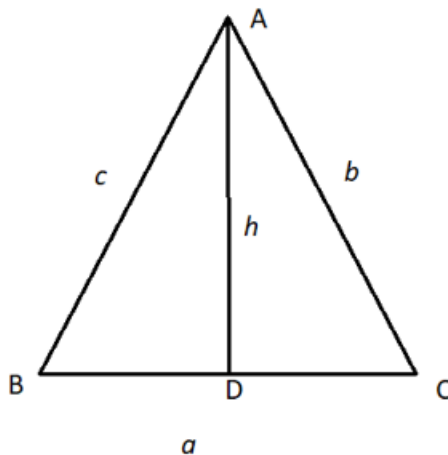
Решење:

Нека је у троуглу ABC $BC = a$ и $AD = h$ ($AD \perp BC$), P - површина троугла

$$P = \frac{a \cdot h}{2}$$

Површина троугла мења се у зависности од h , па ће троугао имати највећу површину када h достигне своју максималну вредност.

$h \leq b$, јер је b хипотенуза а h катета. То значи да достиже максималну вредност ако је $h = b$. То значи да се тачка D претвара у тачку C па је троугао ABC правоугли.



Слика 9.
Picture 9.

- [1.] <https://miodragpetkovic.com/6-didonin-problem/>
- [2.] <http://enastava.matf.bg.ac.rs/~zdrazic/Didonin%20problem.pdf>
- [3.] <https://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf:10315/datastream/PDF/download>
- [4.] Војислав Андрић „Математика $X=1236$ ”, Круг Београд 2006.
- [5.] *Математички лист за ученике основне школе*, Година XX, број 2 (1985), издаје Друштво математичара Србије, Београд
- [6.] *Математички лист за ученике основне школе*, Година XII, број 2 (1977), издаје Друштво математичара Србије, Београд